

Kisi-Kisi EAS Kalkulus 2

► Luas Antara 2 Kurva

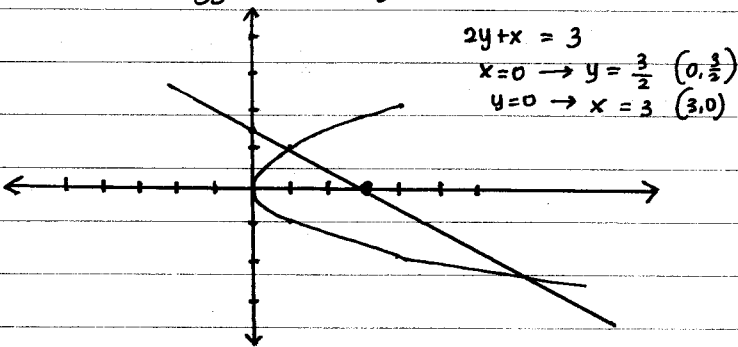
① EAS Kalkulus 2 2023/2024

Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh

$$x = y^2 \text{ dan } 2y + x = 3$$

Jawab :

➤ Menggambar Grafik



➤ Menentukan Titik Potong

$$x_1 = x_2$$

$$y^2 = 3 - 2y$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$(y+3)(y-1) = 0$$

$$y = -3 \vee y = 1$$

➤ Menentukan Rumus Luas

1. Luasan terhadap x

$$y = 1 \rightarrow x = 1$$

$$y = -3 \rightarrow x = 9$$

$$L_{\text{tot}} = L_1 + L_2$$

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{3} [1 - 0]$$

$$= \frac{4}{3} \text{ Satuan Luas}$$

$$L_2 = \int_1^9 \frac{3-x}{2} - (-\sqrt{x}) dx$$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} \Big|_1^9$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{81}{4} + 18 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{24}{2} - \frac{80}{4} + 18 - \frac{2}{3}$$

$$= 12 - 20 + 18 - \frac{2}{3}$$

$$= 10 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{28}{3} \text{ satuan luas}$$

$$L_{\text{tot}} = L_1 + L_2$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{28}{3}$$

$$= \frac{32}{3} \text{ Satuan Luas}$$

II. Luasan terhadap y

$$L = \int_{-3}^1 (3-2y) - y^2 dy$$

$$= 3y - y^2 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{-3}^1$$

$$= 3 - 1 - \frac{1}{3} - \left(-9 - 9 + 9\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{3} + 9$$

$$= 11 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{32}{3} \text{ Satuan Luas}$$

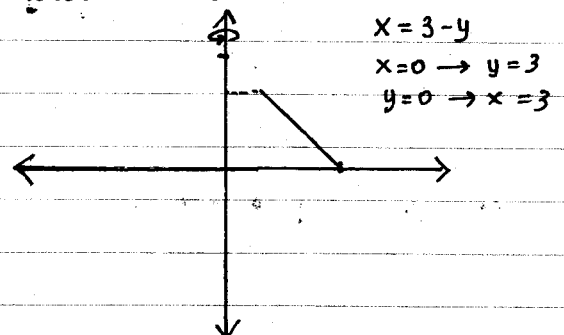
► Luas Permukaan Benda Putar

① EAS 2024/2025

Dapatkan luas permukaan yang dibentuk oleh perputaran kurva $x = 3 - y$ dari $y = 0$ sd $y = 2$ diputar terhadap sumbu-y. Sketsa kurva tersebut

Jawab :

➤ Menentukan Sketsa Kurva



➤ Menentukan Luas Permukaan Benda Putar

$$K = \int_0^2 2\pi (3-y) \sqrt{1 + [(3-y)']^2} dy$$

* Menentukan $[g'(y)]^2$

$$g'(y) = -1$$

$$[g'(y)]^2 = 1$$

$$K = 2\pi \int_0^2 (3-y) \sqrt{1+1} dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 (3-y) \sqrt{2} dy$$

$$= 2\pi \sqrt{2} \int_0^2 (3-y) dy$$

$$= 2\pi \sqrt{2} \left[3y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^2$$

$$= 2\pi \sqrt{2} \left[3(2) - \frac{1}{2}(2)^2 - 0 \right]$$

$$= 2\pi \sqrt{2} [6 - 2]$$

$$= 2\pi \sqrt{2} \cdot 4$$

$$= 8\pi \sqrt{2} \text{ satuan luas}$$

► Titik Berat

① EAS 2024/2025

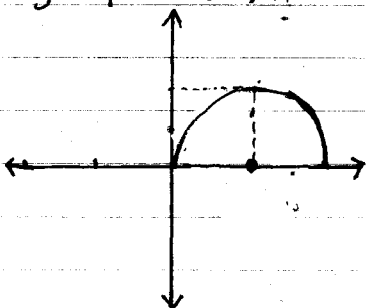
Diberikan daerah homogen yang dibatasi oleh lingkaran bagian atas $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ dan Sumbu- x . Dapatkan titik berat dari dataran tersebut!

➤ Menggambar Grafik

$$y = \sqrt{1-(x-1)^2} \rightarrow y^2 = 1-(x-1)^2$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

* fungsi tersebut adalah lingkaran berjari-jari 1 dengan pusat (1,0), tapi hanya bagian atas



➤ Menentukan Titik Berat

Berdasarkan gambar, dapat diamati bahwa area tersebut simetri terhadap $x=1$. Sehingga, diperoleh

$$\bar{x} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^2 \frac{1}{2} [1-(x-1)^2] dx}{\int_0^2 (\sqrt{1-(x-1)^2}) dx}$$

Dapat diamati, bahwa area adalah $\frac{1}{2}$ lingkaran, maka : $L = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1)^2$$

$$= \frac{1}{2} \pi$$

$$* \int_0^2 \frac{1}{2} [1-(x^2-2x+1)] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 -x^2 + 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cdot 8 + 4 - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{8}{3} + 4 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{12-8}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} \right]$$

$$= \frac{2}{3}$$

Diperoleh bahwa :

$$\bar{y} = \frac{2/3}{1/2\pi} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{4}{3\pi}$$

Sehingga, titik beratnya adalah :

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(1, \frac{4}{3\pi}\right)$$

► Persamaan Parametrik

① EAS 2024/2025

Diberikan persamaan parametrik : $x = 3\cos t + 2$

dan $y = 3\sin t$.

(a). Dapat kan $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, dan $\frac{dy}{dx}$

(b). Dapatkan persamaan garis singgung di
 $t = \frac{\pi}{3}$

Jawab :

$$(a). \frac{dx}{dt} = -3\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3\cos t}{-3\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cot t$$

$$= -\cot t$$

$$(b). m = \frac{dy}{dx} = -\cot t$$

$$= -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$= -\frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = 3\cos t + 2 \rightarrow x = 3\cos 60^\circ + 2$$

$$= \frac{3}{2} + 2$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$y = 3\sin t \rightarrow y = 3\sin 60^\circ$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Pers. Garis Singgung :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{7\sqrt{3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$6y = -2\sqrt{3}x + 7\sqrt{3} + 9\sqrt{3}$$

$$6y = -2\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}$$

$$3y = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$$

► Grafik dalam Koordinat Kutub

① Soal EAS 2024/2025

Tentukan luas daerah di dalam lingkaran

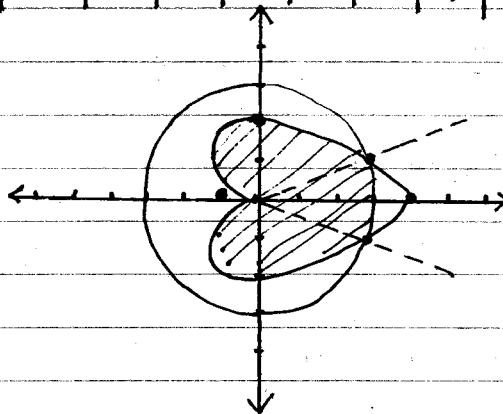
$r = 6$ dan di dalam kardioida $r = 4 + 4\cos\theta$.

Sketsa luasan bidang datar !

Jawab :

→ Sketsa Gambar

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°
r	8	6	4	2	0	2	4



→ Menentukan Titik Potong

$$r_1 = r_2$$

$$6 = 4 + 4\cos\theta$$

$$4\cos\theta = 2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

→ Menentukan Luas

Dari gambar luasan pada grafik, dapat diamati bahwa daerah yang diarsir hanyalah daerah di dalam kardioida $r = 4 + 4\cos\theta$ pada interval

$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$. Sehingga, luarnya adalah :

$$L = \int_{\pi/3}^{5\pi/3} \frac{1}{2} (4 + 4\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{5\pi/3} 16 + 32\cos\theta + 16\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 16 \int_{\pi/3}^{5\pi/3} 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta d\theta$$

$$\text{Catatan : } \cos^2\theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$= 8 \int_{\pi/3}^{5\pi/3} 1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 8 \int_{\pi/3}^{5\pi/3} 1 + \frac{1}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \theta \int_{\pi/3}^{5\pi/3} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \\
&= \theta \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_{\pi/3}^{5\pi/3} \\
&= 8 \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{5\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
&= 8 \left[\frac{5\pi}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) \right] \\
&= 8 \left[\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \left(-\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{3} - \sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{3} \right) \right] \\
&= 8 \left[2\pi + \left(-2\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3} \right) \right] \\
&= 8 \left[2\pi + \left(-\frac{9}{4}\sqrt{3} \right) \right] \\
&= (16\pi - 18\sqrt{3}) \text{ satuan luas} \\
&\quad //
\end{aligned}$$

► Latihan Soal Lainnya

- 1). Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4x + 3$, $y = x + 3$. (EAS 2023/2024)
- 2). Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2x + 3$ dan $y + 2x = 3$ (EAS 2023/2024)
- 3). Dapatkan luas permukaan yang dibentuk dari kurva $y = \sqrt{16 - x^2}$ untuk $-3 \leq x \leq 3$ yang diputar terhadap sumbu-x! (Kuis 2 2026)
- 4). Dapatkan titik berat keping datar homogen yang dibatasi kurva $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ dan $y = 2 - x$. (EAS 2022/2023)
- 5). Dapatkan panjang busur dari kurva $x = t^2$ dan $y = \frac{1}{3}t^3$ sepanjang interval $0 \leq t \leq 1$.
- 6). Dapatkan luas daerah dari irisan kardioida $r = 2 - 2\cos\theta$ dan kardioida $r = 2 + 2\cos\theta$
- 7). Dapatkan luas daerah dalam lingkaran $r = 3\sin\theta$ dan di luar kardioida $r = 1 + \cos\theta$

► Barisan Tak Hingga

① Soal EAS 2024/2025

Tentukan 5 suku pertama barisan yang diberikan di bawah ini. Tentukan pula apakah barisan ini divergen / konvergen. Jika konvergen, dapatkan nilai kekonvergenannya.

$$\left\{ \frac{n}{3n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Jawab :

→ 5 Suku pertama barisan

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad a_3 = \frac{3}{10} \quad a_5 = \frac{5}{16}$$

$$a_2 = \frac{2}{7} \quad a_4 = \frac{4}{13}$$

→ Uji Konvergensi dengan Konsep limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/n}{3n/n + 1/n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Jadi, KONVERGEN menuju $\frac{1}{3}$